# Análisis Matemático

# Iván Arévalo 21/12/2020

# 1er Parcial (16/12/2020) – Funciones, Límites y Derivadas.

# Criterios de evaluación.

# 1 – Prolijidad.

# 2 – Pertinencia conceptual, síntesis y precisión.

# 3 – Desarrollo adecuado.

# 4 – Exactitud en los resultados.

# Funciones

**1.- Dominio, rango y regla, a que hacen referencia. Exprese en una definición. Aplique la misma en simbología matemática.**

**Respuesta Funciones 1:**

Dominio hace referencia a los valores para los cuales la función está definida.

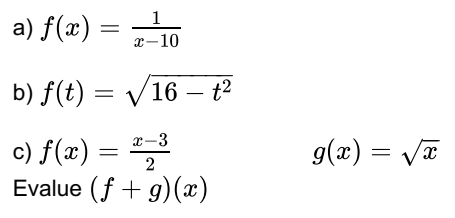
El Rango de una [función](https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) se refiere a la [imagen](https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_imagen) de la función, que es el conjunto de todos los resultados de la función.

Regla se refiere a la relación de correspondencia entre A y B.

Definición de función: Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una regla que a cada elemento de A asocia un único elemento de B. Las funciones son [relaciones](https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) entre los elementos de dos conjuntos.

*f*: *X*→*Y.*

**2.- Evalúe el dominio. Expresar en notación simbólica**



**Respuesta Funciones 2:**

1. El dominio de f(x) = es x >10 o x <10 es decir (-) U ()
2. El dominio de *f(t)* = es -4 por lo que t está en el intervalo [-4,4]
3. El dominio de *(f+g)(x) = + (*donde *f(x)=* ; g(x)=) es x es decir [0,)

**3.- Dado el conjunto A y B, indique cuales corresponden a una función y cuales no:**

a) A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b) A: {1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6} − B: {1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 6}

c) A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B: {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}

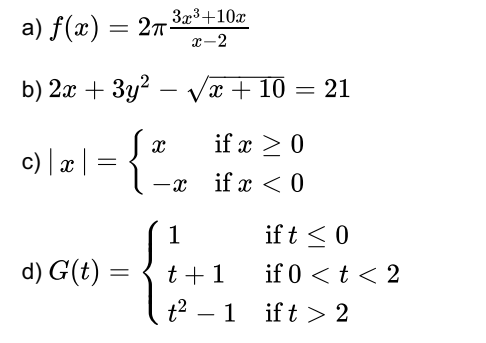
d) A: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} − B: {0, 1, 4, 9, 16, 25, 32, 49, 64, 81}

e) A: {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1} − B: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

**Respuesta Funciones 3**

1. Es función.
2. No es función.
3. Es función.
4. Es función.
5. No es función.

**4.- Dadas las siguientes expresiones matemáticas, indique cuales corresponden a funciones y cuales no:**



**Respuesta funciones 4:**

1. Es función.
2. No es función.
3. Es función.
4. Es función.

**5.- Se fabrica un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para optimizar el área de almacenamiento lo mejor posible? No se tiene problema en altura. Escribir las expresiones matemáticas. Son funciones o ecuaciones?.**

**Respuesta funciones 5:**

X: lado de la base.

Y: altura del depósito

Volumen: V = = 4000 litros= 4000 dm3

Así *y*=

La superficie total del depósito es:

A=4*xy*+=4*x* += + con > 0

Buscamos *x* para que A sea mínima, debemos buscar el valor mínimo deduciendo ese valor de la derivada de A igualada a cero.

A´= +2=

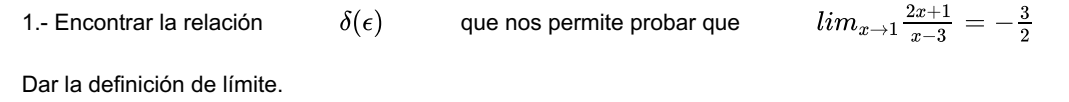
A´= 0 despejando queda = 8000 es decir = 20 dm3

Para verificar que es un mínimo se realiza la derivada segunda y si su valor es mayor que cero el valor encontrado es un mínimo.

A´´= +2 luego para A´´(20) > 0 entonces en x=20 es un mínimo

Así, el lado de la base debe medir x=20 dm y la altura y= 10 dm.

**Límites**



**Respuesta limites 1:**

Sea un número positivo cualquiera, debemos producir un δ>0 tal que se cumpla esta condición

0<|x-c|< δ => |f(x)-L|<

Partimos de c=1, f(x)= y L=- , es decir

0<|x-1|< δ => |+|<

Ahora hay que encontrar numéricamente un nexo entre δ y . La estrategia está en la expresión |f(x)-L|< . Hay que ver cómo se comporta dicha expresión cuando se la reduce a |x-1| en función de encontrar una proporcionalidad con .

|+|<

||<

||<

||<

||<

||>

||>

Se sigue operando hasta que finalmente se obtiene:

||< = δ

Esto indica que el límite, con x->1 para la función, probado desde δ (), debe funcionar para

= δ ()

**2.- Defina continuidad de una función. Exprese en símbolos.**

**Respuesta limites 2:**

Una función f: A → R se dice que es continua en un punto a ∈ A si, para cada número ε > 0, se puede encontrar un número δ > 0 (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo x ∈ A con |x − a| < δ se verifica que |f(x) − f(a)| < ε.



**Respuesta limites 3:**

Sustituimos la variable x por 4

= 3.4 – 7

= 12 – 7

= 5

**4. - Pruebe que el límite de *límx→*-2 es 10**

**Respuesta limites 4:**

Simplifico *límx→*-2 es 10

*límx→*-2 es 10

Sustituyo la variable

-2 + 5 es 10

Resuelvo y no es 10

= 3

**5- De dos (2) ejemplos de discontinuidad.**

**Respuesta limites 5:**

1. y

# Derivadas

**1.- Indicar si c/u de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar toda respuesta, si es V demostrarla y si es Falsa dar un contraejemplo adecuado.  
a) Toda función continua en un punto es derivable en ese punto.  
b) Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.**

**Respuesta Derivadas 1 a**

Verdadera. Demostración:

Demostrar que =

= donde *x c*

=

=

= .0

=

Es decir = con lo cual queda demostrado el teorema

**Respuesta Derivadas 1 b**

Falsa.

**2.- Expresar el concepto de derivada de una función. Escribir la definición simbólicamente.**

**Respuesta Derivadas 2**

En [cálculo diferencial](https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_diferencial) y [análisis matemático](https://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_matem%C3%A1tico), la derivada de una [función](https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_matem%C3%A1tica) es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su [variable independiente](https://es.wikipedia.org/wiki/Variable_independiente). La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el [límite](https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_matem%C3%A1tico) de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño.

=

**3.- Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 pesos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peso que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pesos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio? Resolver y dejar las fórmulas utilizadas.**

Se denominará x al número de pesos de aumento de precio. Así, cada helado costará 50 + x pesos vendiendo 200 - 2x helados/día.

Se obtendrá unos ingresos I (x) por la venta de los helados: I (x) = (50 + x) (200 - 2x)

Mientras que el gasto es: G (x) = (200 - 2x) · 40

Ahora se puede calcular el beneficio B (x):

B (x) = I (x) - G (x) = (50 + x) (200 - 2x) - (200 - 2x) · 40 = (200 - 2x) (50 + x - 40) =

= (200 - 2x) (x + 10) = -2x2 + 180x + 2000

Y así se halla x, mediante la derivada primera igualada a cero, para el máximo beneficio:

B'(x) = -4x + 180

B'(x) = 0 es decir -4x + 180 = 0 obteniendo x = 45

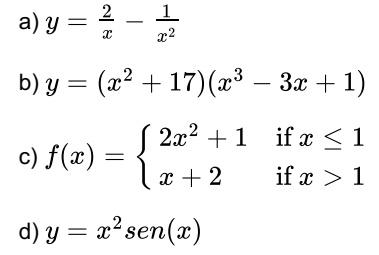
Para verificar que es un máximo se realiza la derivada segunda y si su valor es menor que cero el valor encontrado es un máximo.

B''(x) = -4; B''(45) < 0 lo que implica que en x = 45 hay un máximo

Se obtendrá un beneficio máximo vendiendo cada helado a 50 + 45 pesos. En este caso, el beneficio sería de B (45) = 6050 pesos.

**4.- Hay dos (2) tangentes a la curva y = 4x − x2 que pasan por el punto (2,5). Encuentre las ecuaciones de ambas. Sugerencia: Sea** (x0 , y0) **el punto de tangencia, encuentre las dos condiciones quedebe satisfacer dicho punto.**

**5.- Resolver las derivadas:**



**Respuesta Derivadas 5a:**

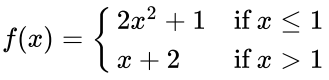
y = - 🡪 y´= + =

**Respuesta Derivadas 5b:**

y = ()(-3x+1) 🡪 y´= 2(-3x+1)+())= (-42+2x-51)

**Respuesta Derivadas 5c:**

Es función por trozos, para calcular su derivada hay que deducir si la función es derivable en x=1. Para ello se debe deducir si dicha función es continua o discontinua y para ello se deben calcular los límites por izquierda y por derecha en ese punto.



Como es función por trozos, para calcular su derivada debemos deducir si la función es derivable en x=1. Para ello se debe deducir si dicha función es continua o discontinua y para ello se deben calcular los límites por izquierda y por derecha en ese punto.

Límite por izquierda:

= x+ 2= (1)+ 2= 3

Mientras que el límite por derecha es

= 2x2 + 1= 2(1)2 + 1= 3

Por lo tanto el límite de f(x) existe y es 3 tanto por izquierda como por derecha, por lo cual la función es continua. Sin embargo, el hecho de ser continua no significa que la función sea derivable. Entonces se debe calcular la derivada en 1 por izquierda y por derecha

= 1 por izquierda

= 4.1 = 4 por derecha 🡪 se sigue que

Entonces existiría un salto en la función y por lo tanto la misma no es derivable en 1. Se concluye que la derivada es

**Respuesta Derivadas 5d:**

y= 🡪 y´= *2x* +